

ASTRONOMIE. — *Recherches sur les mouvements d'Uranus ;*
par M. U.-J. LE VERRIER.

« Je me propose, dans le Mémoire dont j'ai l'honneur de présenter un extrait à l'Académie, d'étudier la nature des irrégularités du mouvement d'Uranus; de remonter à leur cause, en cherchant à découvrir, dans la marche qu'elles affectent, la direction et la grandeur de la force qui les produit.

» La théorie d'Uranus préoccupe aujourd'hui les astronomes. Elle a donné lieu à beaucoup d'hypothèses plus ou moins plausibles, mais qui, dénuées de toute considération géométrique, ne pouvaient avoir de valeur réelle. Plusieurs Sociétés ont même proposé cette théorie pour sujet de concours. Je crois donc, en raison de l'importance de la question, devoir reprendre rapidement son histoire: l'Académie jugera mieux du but de mon travail, de la route que j'ai parcourue et des résultats auxquels je suis arrivé.

» On possédait, en 1820, quarante années d'observations méridiennes régulières d'Uranus. La planète avait, en outre, été observée dix-sept fois, depuis 1690 jusqu'en 1771, par Flamsteed, Bradley, Mayer et Lemonnier. Ces astronomes l'avaient notée comme étoile de sixième grandeur. D'un autre côté, les expressions analytiques des perturbations que Jupiter et Saturne produisent sur Uranus, se trouvaient développées dans le tome III de la *Mécanique céleste*. Il était permis d'espérer qu'en s'aidant de toutes ces données, on parviendrait à construire des Tables exactes du mouvement de la planète; c'est ce qu'entreprit M. Bouvard, membre de l'Académie des Sciences. Mais il rencontra des difficultés imprévues.

» Lorsqu'on base les Tables d'une planète sur un trop petit nombre d'observations, il peut arriver que ces Tables, dans la suite des temps, ne fassent plus connaître avec exactitude les positions de l'astre; du moins, les observations employées sont représentées avec toute la rigueur qu'elles comportent: on peut même dire qu'il est d'autant plus facile d'y satisfaire, qu'on en emploie un moins grand nombre. Il n'en fut pas ainsi dans la construction des Tables d'Uranus. Il y eut impossibilité de représenter à la fois les dix-sept observations anciennes et les nombreuses observations modernes. Dans cette situation embarrassante, le savant académicien jeta des doutes sur l'exactitude des observations anciennes; il les écarta complètement et n'eut égard qu'aux seules observations modernes. Mais on doit dire que si les observations de Flamsteed, Bradley, Mayer et Lemonnier ne sont pas

aussi exactes que celles des astronomes de notre époque, on ne saurait, avec vraisemblance, les regarder comme entachées des erreurs énormes dont les accuseraient les Tables actuelles. L'auteur de ces Tables indiquait même que telle était son opinion, puisqu'il ajoutait, en rendant compte des difficultés qu'il avait rencontrées :

« Telle est donc l'alternative que présente la formation des Tables de la
 » planète Uranus, que si l'on combine les observations anciennes avec les
 » modernes, les premières seront passablement représentées, tandis que
 » les secondes ne le seront pas avec la précision qu'elles comportent; et que
 » si l'on rejette les unes pour ne conserver que les autres, il en résultera
 » des Tables qui auront toute l'exactitude désirable relativement aux obser-
 » vations modernes, mais qui ne pourront satisfaire convenablement aux
 » observations anciennes. Il fallait se décider entre ces deux partis; j'ai dû
 » m'en tenir au second, comme étant celui qui réunit le plus de probabilités
 » en faveur de la vérité, et je laisse aux temps à venir le soin de faire connaître
 » si la difficulté de concilier les deux systèmes tient réellement à l'inexacti-
 » tude des observations anciennes, ou si elle dépend de quelque action
 » étrangère et inaperçue, qui aurait agi sur la planète. »

» Vingt-cinq années, écoulées depuis cette époque, nous ont appris que les Tables actuelles, qui ne représentent pas les lieux anciens, ne s'accordent pas mieux avec les positions observées en 1845. Doit-on attribuer ce désaccord à ce que la théorie n'est pas suffisamment précise? Ou bien cette théorie n'a-t-elle pas été comparée aux observations avec assez d'exactitude, dans le travail qui a servi de base aux Tables actuelles? Enfin, se pourrait-il qu'Uranus fût soumis à d'autres influences que celles qui résultent des actions du Soleil, de Jupiter et de Saturne? Et, dans ce cas, parviendrait-on, par une étude attentive du mouvement troublé de la planète, à déterminer la cause de ces inégalités imprévues? Pourrait-on en venir à fixer le point du ciel où les investigations des astronomes observateurs devraient faire reconnaître le corps étranger, source de tant de difficultés?

» Telles sont les questions que soulève aujourd'hui l'histoire d'Uranus. On doit dire qu'il n'avait été fait de réponse satisfaisante à aucune d'elles, lorsque j'entrepris, l'an dernier, de sonder scrupuleusement tous les points de cette théorie; d'en éclairer les détails aussi loin que le comportent les principes de l'attraction de la matière.

» J'ai fait connaître à l'Académie, dans la séance du 10 novembre 1845, le résultat de la première partie de mes recherches. J'ai prouvé, à cette époque, qu'on avait négligé, en calculant les perturbations produites par

Jupiter et Saturne, des termes nombreux et très-notables, dont l'omission devait avoir pour résultat infaillible l'impossibilité de représenter exactement le mouvement d'Uranus. En sorte qu'on avait dû nécessairement croire à cette impossibilité, soit qu'elle fût réelle, soit qu'elle ne fût qu'apparente.

» Je dus me demander, en terminant mon Mémoire, si ces corrections, portées dans les Tables actuelles, en feraient disparaître les erreurs énormes qui les affectent. En tenant compte, dans ce but, des altérations que les perturbations négligées avaient dû produire dans les éléments de l'ellipse, je reconnus que, si l'écart des Tables, en 1845, était effectivement notablement diminué par l'emploi des nouvelles expressions, il restait encore très-considérable et supérieur aux erreurs des observations. La conséquence de ce fait eût été très-nette si j'avais pu compter, d'une manière absolue, sur l'exactitude de la route qui avait été suivie dans la construction des Tables publiées en 1821. J'aurais pu déclarer, dès le mois de novembre dernier, qu'il fallait chercher ailleurs que dans l'imperfection des éléments de l'ellipse la cause des étranges inégalités d'Uranus. Malheureusement, en examinant avec une grande attention le préambule très-concis des Tables d'Uranus, j'y découvris plusieurs causes d'erreurs, dont il était impossible d'apprécier avec justesse l'influence, et qui s'opposaient à ce qu'on pût tirer aucune conséquence immédiate et précise des Tables elles-mêmes.

» Sans vouloir m'appesantir sur ce point, je dois cependant indiquer sommairement quelques-unes des erreurs que je signale ici, leur existence devant avoir une grande influence sur la route que nous aurons à suivre.

» Les coefficients des équations de condition sont donnés avec quatre chiffres significatifs. Or, de ces quatre chiffres, trois sont la plupart du temps inexacts.

» En second lieu, l'auteur a calculé les quadratures comme les oppositions, sans tenir compte de l'erreur possible du rayon vecteur. En sorte que, s'il y avait une inexactitude dans ce rayon, on cherchait à la corriger par un changement dans la longitude héliocentrique.

» Omettons plusieurs autres causes d'incertitude. Celles que je viens de signaler suffisent, en effet, pour nous arrêter dans les conclusions que nous voudrions baser sur l'emploi immédiat des Tables actuelles. Nous manquons complètement des données qui seraient nécessaires pour apprécier l'influence définitive de ces erreurs. Cette influence est-elle comparable en grandeur aux écarts des Tables? Il est impossible d'en juger; et l'on comprend qu'il n'y a dès lors d'autre parti à suivre que de reprendre, sur de nouvelles bases et

en son entier, la comparaison de la théorie avec les observations. C'est ce que je vais faire actuellement.

» L'importance du sujet me faisait une loi de tout revoir, de tout vérifier moi-même. A l'égard des anciennes observations, j'ai réduit de nouveau celles de Flamsteed, Bradley, Mayer et Lemonnier; et, parmi les nouvelles, j'en ai choisi deux cent soixante-deux, faites principalement aux instants des oppositions et des quadratures. Pour les vingt premières années, depuis 1781 jusqu'en 1800, j'ai eu recours aux publications de l'Observatoire de Greenwich. Les observations publiées par l'Observatoire de Paris, dans la *Connaissance des Temps* et dans deux volumes in-folio, m'ont servi depuis 1801 jusqu'en 1828. En 1829 et 1830, j'ai repris les observations anglaises. Enfin depuis 1835 jusqu'en 1845, j'ai pu profiter de la nouvelle série, encore inédite, des excellentes observations faites à Paris, et que M. Arago m'a fait l'amitié de me confier.

» Partant alors des éléments elliptiques d'Uranus, déjà connus avec une grande approximation, j'ai calculé les positions héliocentriques de la planète aux époques correspondant aux observations, et j'y ai ajouté les expressions des perturbations, telles qu'elles résultent de la première partie de mon travail. Les positions héliocentriques ainsi obtenues, et combinées avec les lieux du Soleil, déduits des Tables les plus exactes, m'ont fourni les positions géocentriques de la planète. Retranchant enfin des coordonnées calculées les coordonnées observées, j'ai obtenu les écarts qu'affecte la théorie par rapport aux observations, lorsqu'on adopte les éléments elliptiques en usage, et lorsqu'on suppose que la planète, obéissant à l'action principale du Soleil, n'est point soumise à des forces secondaires autres que celles qui résultent des actions des planètes connues. Admettons que cette hypothèse soit juste: puisque les perturbations produites par les planètes ont été établies avec exactitude, les écarts de la théorie, relativement aux observations, ne pourront provenir que des erreurs des éléments de l'ellipse prise pour point de départ; en modifiant convenablement ces éléments, on ramènera les positions calculées à ne différer des positions observées que de quantités inférieures aux erreurs dont les observations sont susceptibles. C'est donc en examinant s'il est possible de faire disparaître les erreurs théoriques par des changements dans les éléments de l'ellipse, et en cherchant à donner à notre conclusion la rigueur d'une démonstration géométrique, que nous pourrons savoir définitivement si Uranus n'obéit qu'aux actions du Soleil et des autres planètes.

» Prenons quatre longitudes exactes de la planète, à la détermination de

chacune desquelles nous aurons fait concourir plusieurs observations concordantes; et calculons les éléments de l'ellipse de telle manière qu'ils satisfassent rigoureusement à ces quatre longitudes. Comparons ensuite les positions déterminées, au moyen de ces éléments, avec la série d'observations que nous possédons, et examinons avec soin les causes qui peuvent faire différer le résultat du calcul, du résultat de l'observation. Elles sont au nombre de trois, savoir: 1^o l'erreur propre de la nouvelle observation comparée; 2^o l'incertitude qui peut affecter la position calculée, par suite des erreurs des longitudes qui ont servi de base à la détermination des éléments elliptiques; 3^o enfin l'erreur théorique due à ce que la planète obéirait réellement à quelque force secondaire inconnue. Si nous prouvions que les deux premières causes ne sauraient suffire pour expliquer la différence qui existe entre le calcul et l'observation, nous serions forcés d'admettre l'influence de la troisième. Appliquons ce mode de raisonnement à la question qui nous occupe.

» Les éléments elliptiques, déterminés par quatre longitudes, prises à des époques très-distantes les unes des autres, laissent, en 1838, par exemple, 124",98 sexagésimales d'erreur dans la théorie. Des trois parties qui pourraient composer cet écart, la première, celle qui est due à l'erreur du lieu observé, peut être considérée comme insensible; la position a été déduite de plusieurs observations méridiennes concordantes entre elles: elle ne saurait inspirer le plus léger doute. La seconde partie de l'erreur totale est plus difficile à estimer; il faut obtenir les expressions que des changements apportés aux quatre longitudes fondamentales introduiraient dans les éléments de l'ellipse, et en déduire ensuite les corrections correspondantes des positions calculées au moyen des éléments. Supposons que les erreurs des longitudes fondamentales influent toutes dans le même sens sur l'erreur de la longitude en 1838; admettons encore que chacune de ces longitudes fondamentales soit aussi erronée que le peuvent comporter les incertitudes des observations; malgré cette accumulation peu probable d'erreurs, nous ne parviendrons pas à expliquer, par cette cause, plus de 30" sur les 125" d'erreur, trouvées en 1838. Le reste, c'est-à-dire près de cent secondes, devra de toute nécessité être attribué à la troisième cause, à une influence étrangère jusqu'ici inconnue, agissant sur Uranus. Ce que nous disons du lieu d'Uranus en 1838 s'applique également à la position de cette planète aux autres époques. En 1831, par exemple, le lieu calculé s'éloigne du lieu observé de 188", dont 140" environ ne sauraient être expliquées si l'on n'admet pas une autre influence que celles du Soleil, de Jupiter et de Saturne.

» Pour fixer nettement le sens du résultat auquel je viens de parvenir, je demande la permission d'insister sur deux points. Je me suis appuyé sur des formules exactes, avantage dont s'étaient privés mes devanciers, en ne commençant pas par approfondir la théorie; cette négligence aurait toujours fait suspecter l'exactitude de leurs conclusions. On doit remarquer, en second lieu, que je ne me suis pas borné à essayer des combinaisons plus ou moins nombreuses d'équations, et à déclarer que je n'avais pas réussi à représenter le mouvement de la planète; on n'aurait pas manqué de m'objecter que j'avais peut-être omis la véritable combinaison, qu'un autre plus heureux pourrait la découvrir. On se serait ainsi trouvé dans la même incertitude qu'auparavant : mais telle n'est pas la marche que j'ai suivie. J'ai démontré, si je ne me trompe, qu'il y a incompatibilité formelle entre les observations d'Uranus et l'hypothèse que cette planète ne serait soumise qu'aux actions du Soleil et des autres planètes, agissant conformément aux principes de la gravitation universelle. On ne parviendra jamais, dans cette hypothèse, à représenter les mouvements observés.

» A peine avait-on commencé, il y a quelques années, à soupçonner que le mouvement d'Uranus était modifié par quelque cause inconnue, que déjà toutes les hypothèses possibles étaient hasardées sur la nature de cette cause. Chacun, il est vrai, suivit simplement le penchant de son imagination, sans apporter aucune considération à l'appui de son assertion. On songea à la résistance de l'éther; on parla d'un gros satellite qui accompagnerait Uranus, ou bien d'une planète encore inconnue, dont la force perturbatrice devrait être prise en considération; on alla même jusqu'à supposer qu'à cette énorme distance du Soleil, la loi de la gravitation pourrait perdre quelque chose de sa rigueur. Enfin, une comète n'aurait-elle pas pu troubler brusquement Uranus dans sa marche?

» Je le répète, toutes ces opinions ont été émises sous la forme d'hypothèses, et sans qu'on ait cherché à étayer aucune d'elles par des considérations positives. On ne doit pas s'en étonner. Le problème du mouvement d'Uranus n'avait pas été traité avec une rigueur telle, qu'il fût démontré qu'on ne pourrait pas parvenir à le résoudre, par la considération des forces actuellement connues. Dans cette incertitude, il était sans doute permis de hasarder une hypothèse. Mais nul n'aurait pu se résoudre à entreprendre un travail considérable, sur des inégalités dont l'existence était encore problématique. Aujourd'hui il en est tout autrement. On ne saurait plus douter de ces inégalités, et le moment est venu de chercher à démêler la direction et la grandeur de la force qui les produit.

» Je ne me dissimule pas les écueils dont est semée la route que je vais actuellement parcourir. Plus d'une fois, des obstacles imprévus m'auraient fait renoncer à mon entreprise si je n'avais eu la profonde conviction de son utilité. Comment, en effet, les astronomes observateurs arriveraient-ils à découvrir, dans l'immense étendue du ciel, la cause physique des perturbations d'Uranus, si l'on ne parvient pas à jalonner leur travail, à circonscrire leurs recherches dans une enceinte déterminée? Et quel est celui d'entre eux qui se résoudrait à chercher un astre télescopique successivement dans les douze signes du zodiaque? Il faut donc commencer par prouver que les recherches doivent être concentrées dans un petit nombre de degrés. On pourra alors compter que les veilles des observateurs ne feront pas défaut; qu'avant peu, l'astronomie physique se sera enrichie de l'astre dont l'astronomie théorique aura à l'avance dévoilé l'existence et fixé la position.

» Je ne m'arrêterai pas à cette idée que les lois de la gravitation pourraient cesser d'être rigoureuses, à la grande distance à laquelle Uranus est situé du Soleil. Ce n'est pas la première fois que, pour expliquer des inégalités dont on n'avait pu se rendre compte, on s'en est pris au principe de la gravitation universelle. Mais on sait aussi que ces hypothèses ont toujours été anéanties par un examen plus approfondi des faits. L'altération des lois de la gravitation serait une dernière ressource à laquelle il ne pourrait être permis d'avoir recours qu'après avoir épuisé l'examen des autres causes, qu'après les avoir reconnues impuissantes à produire les effets observés.

» Je ne saurais croire davantage à la résistance de l'éther; résistance dont on a à peine entrevu des traces dans le mouvement des corps de la densité la plus faible; c'est-à-dire dans les circonstances qui seraient les plus propres à manifester l'action de ce fluide.

» Les inégalités particulières d'Uranus seraient-elles dues à un gros satellite qui accompagnerait la planète? Les oscillations qui se manifesteraient dans la marche d'Uranus affecteraient alors une très-courte période; et c'est précisément le contraire qui résulte des observations. Les inégalités qui nous occupent se développent avec une très-grande lenteur. Il est donc impossible de recourir à l'hypothèse actuelle, d'autant plus que le satellite devrait être effectivement très-gros, et n'aurait pu échapper aux observateurs.

» Serait-ce donc une comète qui, tombant sur Uranus, aurait, à une certaine époque, changé brusquement la grandeur et la direction de son mouvement? J'ai déjà dit qu'on satisfaisait assez bien au mouvement de la planète entre 1781 et 1820, sans le secours d'aucune force extraordinaire. Cette remarque, qui semble prouver que la force perturbatrice n'a point exercé

d'influence sensible durant cette période, serait assez conforme à l'hypothèse actuelle d'une altération brusque du mouvement de la planète. Mais alors, la période de 1781 à 1820 pourrait se lier naturellement, soit à la série des observations antérieures, soit à la série des observations postérieures, et ne serait incompatible qu'avec l'une d'elles. Or c'est ce qui n'a pas lieu. On peut prouver que la série intermédiaire ne peut s'accorder, d'une part, avec les anciennes observations, et, de l'autre, avec les nouvelles.

» Il ne nous reste ainsi d'autre hypothèse à essayer que celle d'un corps agissant d'une manière continue sur Uranus, changeant son mouvement d'une manière très-lente. Ce corps, d'après ce que nous connaissons de la constitution de notre système solaire, ne saurait être qu'une planète, encore ignorée. Mais cette hypothèse est-elle plus plausible que les précédentes? N'a-t-elle rien d'incompatible avec les inégalités observées? Est-il possible d'assigner la place que cette planète devrait occuper dans le ciel?

» Et d'abord, on ne saurait la placer au-dessous de Saturne, qu'elle dérangerait plus qu'elle ne trouble Uranus; et l'on sait que son influence sur Saturne est insensible.

» Peut-on la supposer située entre Saturne et Uranus? Il faudrait la placer beaucoup plus près de l'orbite d'Uranus que de celle de Saturne; et dès lors sa masse devrait être assez petite pour ne produire sur Uranus que des perturbations qui sont, en définitive, peu considérables. Il est facile d'en conclure que son action perturbatrice ne s'exercerait qu'au moment où elle passerait dans le voisinage d'Uranus; et le peu de différence qu'il y aurait entre les durées des révolutions des deux astres ferait que la circonstance présente ne se serait rencontrée qu'une fois dans la période qu'embrassent les observations de la planète. Cette conséquence est contraire à ce qu'on déduit des observations.

» La planète perturbatrice sera donc située au delà d'Uranus. Nous ne devons pas supposer qu'elle en soit voisine, car alors sa masse serait très-petite, et nous retomberions ainsi dans les mêmes impossibilités que précédemment. Ce sera bien loin au delà d'Uranus, que nous pourrions espérer de découvrir ce nouveau corps dont la masse sera assez considérable. Nous savons, par la singulière loi qui s'est manifestée entre les distances moyennes des planètes au Soleil, que les planètes les plus éloignées sont situées à des distances du centre qui sont, à très-peu près, doubles les unes des autres; il serait donc naturel d'admettre que le nouveau corps est deux fois plus éloigné du Soleil qu'Uranus, si la considération suivante ne nous en faisait à peu près une loi. J'ai dit que la planète cherchée ne pouvait être située à une

petite distance d'Uranus. Or, il n'est pas plus possible de la placer à une très-grande distance, à une distance triple de celle d'Uranus au Soleil par exemple. Il faudrait, en effet, dans cette hypothèse, attribuer à cette planète une masse très-considérable; la grande distance à laquelle elle se trouverait à la fois de Saturne et d'Uranus rendrait ses actions, sur ces deux planètes, comparables entre elles, et il ne serait point possible d'expliquer les inégalités d'Uranus sans développer dans Saturne des perturbations très-sensibles, et dont il n'existe point de traces.

» Ajoutons que les orbites de Jupiter, Saturne et Uranus étant fort peu inclinées à l'écliptique, on peut admettre, dans une première approximation, qu'il en est de même pour la planète cherchée; les observations des latitudes d'Uranus le prouvent sans réplique, puisque ces latitudes n'ont guère d'autres inégalités sensibles que celles qui sont dues aux actions de Jupiter et de Saturne. Nous sommes ainsi conduits à nous poser la question suivante :

« *Est-il possible que les inégalités d'Uranus soient dues à l'action d'une*
 » *planète, située dans l'écliptique, à une distance moyenne double de celle*
 » *d'Uranus? Et, s'il en est ainsi, où est actuellement située cette planète?*
 » *Quelle est sa masse? Quels sont les éléments de l'orbite qu'elle parcourt?* »
 Le problème étant énoncé en ces termes, je le résous rigoureusement.

» Si l'on pouvait déterminer, à chaque époque, la variation des perturbations dues à l'action de la masse inconnue, on en déduirait la direction dans laquelle tombe Uranus, par suite de l'action incessante du corps troublant : on connaîtrait ainsi la position de ce corps. Mais le problème est loin de se présenter aussi simplement. Les expressions numériques des perturbations ne pourraient se conclure immédiatement des observations, que si l'on connaissait les valeurs rigoureuses des éléments de l'ellipse décrite par Uranus autour du Soleil; et ces éléments, à leur tour, ne peuvent se déterminer exactement, si l'on ne connaît pas la quantité des perturbations. On le voit, il est impossible de scinder en deux parties distinctes la recherche des éléments d'Uranus et celle des éléments du corps qui le trouble. En vain espérerait-on, en formant des équations empiriques, découvrir, à priori, la loi des perturbations; on courrait le risque de se tromper grossièrement, puisqu'on n'aurait ainsi obtenu qu'une expression propre à représenter l'excès des perturbations sur les erreurs provenant des inexactitudes des éléments elliptiques, et nullement les perturbations elles-mêmes. Il n'y a qu'une route à suivre : il faudra former les expressions des perturbations, dues au nouveau corps, en fonctions de sa masse, et des éléments inconnus de l'ellipse qu'il décrit; il faudra introduire ces perturbations dans les coordonnées

d'Uranus, calculées au moyen des éléments inconnus de l'ellipse que cette planète parcourt autour du Soleil. Égalant les coordonnées ainsi obtenues aux coordonnées observées, on prendra pour inconnues, dans les équations de condition qui en résulteront, non-seulement les éléments de l'ellipse décrite par Uranus, mais encore les éléments de l'ellipse décrite par la planète troublante, dont nous cherchons la position.

» On peut éliminer, avec rigueur, les éléments de l'orbite d'Uranus; on obtient ainsi des relations entre la masse de la planète cherchée, l'excentricité de son orbite elliptique et la valeur de la longitude moyenne à l'origine du temps. La suite de la discussion demande une attention toute particulière.

» Les nouvelles relations suffisent encore pour déterminer, avec une entière certitude, les expressions de l'excentricité de l'orbite et de la longitude du périhélie, en fonctions de la masse et de la longitude de l'époque. Imaginons que le calcul ait été fait, et qu'on ait éliminé des différentes relations l'excentricité et la longitude du périhélie. On tombera sur des équations qui, ne renfermant plus d'autres arbitraires que la masse de la planète et la longitude moyenne à l'origine du temps, devront toutes être satisfaites par un choix convenable de ces inconnues.

» Il est fort remarquable que la masse ait, à très-peu près, disparu d'elle-même de ces équations. L'élimination de l'excentricité et de la longitude du périhélie entraîne, non pas l'évanouissement complet des termes dépendants de la masse, mais leur réduction à un tel degré de petitesse, qu'il devient évident que cette masse ne pourra point être déterminée avec précision, qu'il sera permis de la supposer comprise entre des limites assez étendues. Dans tous les cas, on pourra négliger, à très-peu près, les termes dépendants de la masse dans les équations finales auxquelles nous sommes arrivés; on ne disposera plus que de la longitude de l'époque pour les résoudre.

» Or, je démontre qu'on peut choisir cette longitude de manière à satisfaire à la fois aux équations finales; qu'on peut faire, par là, que toutes les observations de la planète soient représentées avec l'exactitude qu'elles comportent. Je prouve encore qu'il n'y a qu'une solution possible, et que, plus on s'éloigne de cette solution, et plus les écarts de la théorie, par rapport aux observations, deviennent considérables; d'où je conclus qu'on peut effectivement représenter les irrégularités du mouvement d'Uranus par l'action d'une nouvelle planète située à une distance double de la distance d'Uranus au Soleil; et, ce qui est très-important, qu'on n'y parvient que d'une seule manière.

» En disant que le problème n'est susceptible que d'une solution, j'entends

qu'il n'y a pas deux régions du ciel que l'on puisse choisir à volonté, pour y placer la planète à une époque déterminée, au 1^{er} janvier 1847 par exemple. Mais chacun comprendra que, dans cette région unique, on doit se borner à assigner à la position de l'astre de certaines limites, restreintes si les observations sont exactes et en nombre convenable; étendues si les observations sont insuffisantes. Occupons-nous donc enfin de la position de la planète dans le ciel.

» Pour écarter de ce résumé toute considération trop abstraite, je me bornerai à faire connaître l'expression de la longitude au 1^{er} janvier 1847. C'est le but le plus important de mon travail; c'est le résultat qui devra servir de point de départ aux observateurs pour découvrir le nouvel astre. m étant la masse de la planète rapportée à la dix-millième partie du Soleil prise pour unité, et α une indéterminée, j'ai trouvé, pour l'expression de la longitude héliocentrique de la planète, exprimée en degrés sexagésimaux, au 1^{er} janvier 1847 :

$$v = 314^{\circ},5 + 12^{\circ},25\alpha + \frac{1}{m} \{ 20^{\circ},82 - 10^{\circ},79\alpha - 1^{\circ},14\alpha^2 \}.$$

» La discussion de cette formule, sous le rapport des limites dans lesquelles m et α doivent rester comprises, pour que l'on ne cesse pas de satisfaire aux observations, montre qu'en assignant 325 degrés de longitude héliocentrique à la planète, au 1^{er} janvier 1847, on ne commet pas une erreur de 10 degrés.

» Tel est le résultat capital auquel je suis parvenu. Je ne chercherai pas à le comprendre aujourd'hui dans des limites plus restreintes. Le travail dont je viens de présenter un extrait à l'Académie doit être considéré comme une ébauche d'une théorie qui commence. Lorsque, dans l'ignorance complète de la position de la planète cherchée, il m'était nécessaire d'étendre les discussions des formules et leur comparaison aux observations, à toutes les régions de l'écliptique, j'ai dû nécessairement, pour simplifier mon travail et ne pas le rendre impossible, ne m'occuper que d'un certain nombre de positions choisies d'Uranus; mais, actuellement que les éléments de l'ellipse décrite par la planète sont déterminés avec approximation, il devient possible de faire entrer dans la solution du problème toutes les observations que nous possédons. L'ensemble de ces données permettra, sans nul doute, d'assigner à la position actuelle de la planète des limites beaucoup plus restreintes que celles que j'ai énoncées plus haut. On pourra même corriger la durée de la révolution périodique.

» Je vais m'occuper d'apporter à la nouvelle théorie les perfectionnements

dont elle est susceptible : malgré les documents que j'ai réunis sur ce sujet, je ne sais si j'aurai terminé avant la prochaine opposition. Je tâcherai d'obtenir, pour cette époque, tous les renseignements propres à nous conduire au but avec plus de certitude.

» On voit, en résumé, que, pour obtenir, de la réunion de la théorie avec les observations, tous les secours dont j'avais besoin, il m'a fallu successivement :

» Reprendre le calcul des perturbations que Jupiter exerce sur Uranus ; déterminer celles qui sont produites par Saturne, en poussant les approximations jusqu'aux carrés et aux produits des masses, ce qui a introduit de notables changements dans les théories admises ;

» Réduire près de trois cents observations méridiennes d'Uranus ;

» Calculer les positions héliocentriques correspondantes de cette planète, en supposant qu'elle n'obéisse qu'aux actions réunies du Soleil, de Jupiter et de Saturne ; en déduire les coordonnées géocentriques avec le secours des Tables du Soleil, et prouver péremptoirement qu'il y a incompatibilité entre les lieux ainsi calculés et les lieux observés.

» L'existence d'une planète encore inconnue se trouvant ainsi mise hors de doute, j'ai renversé le problème qu'on s'est, jusqu'ici, proposé dans le calcul des perturbations. Au lieu d'avoir à mesurer l'action d'une planète déterminée, j'ai dû partir des inégalités reconnues dans Uranus, pour en déduire les éléments de l'orbite de la planète perturbatrice ; pour donner la position de cette planète dans le ciel, et montrer que son action rendait parfaitement compte des inégalités apparentes d'Uranus.

» Il ne viendra sans doute à personne l'idée de vouloir réduire notre système solaire à d'étroites limites, et d'en tirer une conclusion contre l'existence d'un nouvel astre. Dans ce cas, cependant, je répondrais qu'on aurait eu les mêmes raisons d'affirmer, le 12 mars 1781, que Saturne était la dernière des planètes, sauf à être contredit le lendemain par la découverte d'Uranus. L'hypothèse qu'il existe des planètes plus éloignées du Soleil que celles que nous connaissons est-elle donc neuve ? Dès l'année 1758, l'illustre géomètre Clairaut déclarait, dans la séance publique de l'Académie des Sciences, à l'occasion des perturbations de la comète de Halley, qu'un corps qui traverse des régions aussi éloignées pourrait être soumis à des forces totalement inconnues, telles que l'action de planètes, trop distantes pour être jamais aperçues.

» Espérons seulement que les astres dont parle Clairaut ne seront pas tous invisibles ; que, si le hasard a fait découvrir Uranus, on réussira bien à voir la planète dont je viens de faire connaître la position. »

vant : Dans un champ, planté avec des pommes de terre saines tirées d'une localité où la maladie de 1845 n'avait pas sévi, toute la récolte de 1846 est saine, tandis que plusieurs rangées de pommes de terre, portant les atteintes de l'altération de 1845, plantées dans le même champ, ont produit des tubercules sains d'abord, mais sur lesquels l'affection spéciale reparait en ce moment. »

ASTRONOMIE. — *Sur la planète qui produit les anomalies observées dans le mouvement d'Uranus. — Détermination de sa masse, de son orbite et de sa position actuelle; par M. U.-J. LE VERRIER.*

« J'ai eu l'honneur, dans la séance du 1^{er} juin dernier, de communiquer à l'Académie les principaux résultats du travail que j'ai entrepris sur la théorie d'Uranus. J'ai prouvé qu'il n'était pas possible de représenter les observations de cet astre, dans le système de la gravitation universelle, en supposant qu'il ne fût soumis qu'aux actions réunies du Soleil et des planètes connues. Toutes les anomalies observées s'expliquent, au contraire, dans leurs moindres détails, par l'influence d'une nouvelle planète qui serait située au delà d'Uranus, et qui parcourrait une orbite déterminée.

» Dans ce premier travail, j'avais déjà pu me prononcer avec précision sur plusieurs points, et particulièrement sur la position actuelle du nouvel astre, auquel j'avais assigné 325 degrés de longitude héliocentrique, au 1^{er} janvier 1847. D'autres éléments, la masse en particulier, dont la connaissance offrirait tant d'intérêt sous le rapport de la visibilité, et la durée de la révolution périodique, étaient demeurés assez incertains. J'avais annoncé que je m'occuperais à faire disparaître ces imperfections; et que, dans l'intérêt de la recherche physique de l'astre, je tâcherais d'atteindre ce but le plus rapidement possible. Mais j'ai rencontré de grandes difficultés, et le temps qu'il m'a fallu pour les surmonter m'a entraîné jusqu'au moment de l'*opposition* de la planète, qui a lieu actuellement. Heureusement, les recherches que les astronomes tenteront, pour découvrir le nouvel astre dans les lunettes puissantes, seront encore possibles cette année pendant trois mois; et j'ai reçu l'assurance que ce temps sera employé utilement.

» Lorsque j'ignorais complètement dans quelle partie du zodiaque je devais trouver le nouvel astre, et qu'il me fallait, par conséquent, étendre mes recherches à toutes les régions de l'écliptique, j'avais dû, pour ne pas rendre les discussions interminables, me borner à l'emploi d'un certain nombre d'observations d'Uranus convenablement choisies. Dans le travail

actuel, je fais usage, pour donner plus de précision à mes résultats, de toutes les anciennes observations d'Uranus, au nombre de dix-neuf, faites par Flamsteed, Bradley, Mayer et Lemonnier; et j'emploie le nombre considérable de deux cent soixante-deux observations, choisies convenablement parmi celles qui ont été faites à Paris et à Greenwich, depuis 1781 jusqu'en 1845, soit dans les oppositions, soit dans les quadratures. Chacune des longitudes déduites des observations, comparée avec la longitude donnée à la même époque par la théorie, fournit une équation de condition entre les corrections des éléments de l'orbite d'Uranus, entre la masse et les éléments de l'orbite de la planète cherchée. Ces équations renferment ainsi neuf inconnues : et il est nécessaire que j'entre dans quelques détails sur la manière dont ces variables s'y trouvent engagées.

» Les corrections des éléments de l'orbite d'Uranus y entrent linéairement, et ne peuvent ainsi donner lieu à aucune difficulté.

» Considérons, parmi les éléments de la planète cherchée, sa masse, son excentricité et la longitude de son périhélie, et substituons à ces trois variables les trois suivantes : 1^o la masse; 2^o le produit de la masse par l'excentricité et par le sinus de la longitude du périhélie; 3^o le produit de la masse par l'excentricité et par le cosinus de la longitude du périhélie. Les équations seront du premier degré par rapport à ces nouvelles variables, si l'on n'a égard qu'aux inégalités séculaires, aux inégalités périodiques indépendantes des excentricités, et aux inégalités périodiques dépendantes de la première puissance des excentricités. Cet avantage disparaîtrait, s'il fallait tenir compte des inégalités du second ordre; or, s'il est permis de les négliger dans une première approximation, il devient impossible, dans un travail précis, d'omettre l'inégalité du second ordre dont l'argument dépend de la longitude moyenne d'Uranus, diminuée de trois fois la longitude moyenne de la planète cherchée. J'ai évité les difficultés, auxquelles eût donné lieu l'introduction de cette inégalité, sous la forme habituelle, au moyen d'un artifice fondé sur la longueur de la période; en sorte que les équations de condition se sont trouvées définitivement être du premier degré par rapport à la masse, et aux deux autres variables dont dépendent l'excentricité et la longitude du périhélie.

» Les coefficients de ces trois variables sont des fonctions du demi-grand axe de l'orbite de la planète troublante, et de la longitude de l'époque de cette planète; mais ces fonctions, sous leur forme la plus générale, sont tellement compliquées, qu'elles s'opposent à toute discussion immédiate; et, tandis que la masse, l'excentricité et la longitude du périhélie peuvent être

tirées directement des équations, la longitude moyenne et le demi-grand axe exigent qu'on ait recours à des approximations successives.

» Guidé par des considérations particulières et par quelques essais, j'avais admis, dans ma première solution, que le grand axe de l'orbite de la planète cherchée était double du grand axe de l'orbite d'Uranus; j'avais ensuite fait voir qu'avec cette hypothèse, et par une détermination convenable des autres éléments, on pouvait satisfaire aux équations du problème. C'était une solution détournée. Dans le travail actuel, la valeur la plus exacte du grand axe est, comme celle des autres éléments, déduite directement des équations; et il en est de même des limites entre lesquelles on peut le faire varier, sans cesser de représenter les observations d'Uranus.

» J'ai dit que les fonctions du grand axe et de la longitude de l'époque, qui entrent dans les équations de condition, étant très-complicées, il était nécessaire, à l'égard de ces deux variables, de recourir à des approximations successives. Mes recherches précédentes m'avaient fait connaître qu'on pouvait prendre pour valeur approchée du rapport du grand axe d'Uranus à celui de la planète troublante, la fraction 0,50; des essais ultérieurs m'ont appris que la fraction 0,51 serait encore plus exacte. Quant à la longitude moyenne, elle devait être, d'après les mêmes recherches, égale à 252 degrés environ. Au moyen de ces données, j'ai pu faire en sorte que les coefficients qui étaient des fonctions du grand axe de l'orbite et de la longitude de l'époque ne renfermassent plus d'autres variables que les corrections dont ont besoin les valeurs approchées que nous venons d'indiquer pour ces éléments. De plus, ces corrections sont assez petites pour qu'on puisse développer par rapport à leurs puissances et à leurs produits les fonctions qui les renferment, et s'en tenir aux termes du premier et du second ordre, dans les limites où sont restreintes les variables.

» Nous voyons donc, quant à la forme des équations, qu'elles sont du premier degré, par rapport aux corrections des éléments de l'orbite d'Uranus; qu'elles sont encore du premier degré, par rapport aux trois éléments qui donnent la masse, l'excentricité et la longitude du périhélie de la planète cherchée; enfin, que les coefficients de ces trois variables sont des fonctions du second ordre, par rapport aux corrections des deux autres éléments. Je passe à la résolution des équations, après avoir fait remarquer que si deux des éléments m'ont forcé de recourir à la méthode des approximations successives, en m'appuyant sur mes recherches antérieures, on ne possède pas de moyen plus simple de déterminer les orbites des planètes, par l'observation directe de ces astres.

» Il n'est pas nécessaire de traiter séparément chacune des équations ainsi formées. La lenteur du mouvement d'Uranus, et celui de la planète perturbatrice, permettent d'en réunir plusieurs, de manière à former des équations moyennes, dont les constantes seront probablement d'autant plus exactes, qu'elles résulteront de l'emploi d'un plus grand nombre d'observations. Les équations de condition distinctes, auxquelles je me suis arrêté, ont donc été formées de la manière suivante :

» *Première équation.* — Une observation faite par Flamsteed, le 23 décembre 1690.

» *Deuxième équation.* — Quatre observations faites en 1712 et 1715, par Flamsteed.

» *Troisième équation.* — Deux observations faites en 1750, par Lemonnier.

» *Quatrième équation.* — Deux observations faites en 1753 et 1756, par Bradley et Mayer.

» *Cinquième équation.* — Une observation faite en 1764, par Lemonnier.

» *Sixième équation.* — Huit observations faites en 1768 et 1769, par Lemonnier.

» *Septième équation.* — Une observation faite en 1771, par Lemonnier.

» Enfin, les observations faites depuis 1781 jusqu'en 1845, étant groupées convenablement, m'ont fourni *vingt-six* équations, qui, réunies aux précédentes, ont porté le nombre des équations définitives à *trente-trois*.

» Après différentes tentatives infructueuses pour tirer des équations précédentes, non-seulement les valeurs les plus précises des inconnues qu'elles renferment, mais encore les limites dans lesquelles doivent rester comprises ces inconnues, pour que la théorie puisse représenter les observations, j'ai été conduit à reconnaître qu'il était indispensable, comme dans ma première solution, de commencer par éliminer six des inconnues que les équations donnent très-nettement en fonctions des trois autres, savoir : les quatre inconnues dont dépend l'orbite d'Uranus, et les deux inconnues qui donnent l'excentricité et le périhélie de la planète troublante, quand on connaît sa masse. Les trois autres variables, la masse, les corrections du grand axe et de la longitude de l'époque de la planète cherchée, doivent être conservées pour une discussion ultérieure.

» J'ai employé, pour cette première élimination de six des inconnues, la méthode des moindres carrés. Je l'ai fait, je l'avoue, à mon grand regret : car cette circonstance, que trois des coefficients sont des fonctions du second ordre par rapport à deux variables, rend l'emploi de la méthode excessive-

ment long et pénible : je ne me suis décidé à y recourir, qu'après m'être convaincu qu'aucune marche plus simple ne conduirait à un résultat satisfaisant. J'ai tenu compte, naturellement, du nombre d'observations sur lesquelles se base chacune des équations, et aussi de l'exactitude relative de ces observations.

» Les valeurs des six inconnues, ainsi déterminées en fonctions des autres, renferment la masse cherchée au premier degré. J'ai développé les fonctions des corrections du grand axe et de la longitude de l'époque qu'elles renferment, par rapport aux puissances de ces variables, en me bornant aux termes du second ordre. Substituant enfin les résultats ainsi obtenus dans les premiers membres des équations de condition, et conservant toujours le même degré d'approximation, j'ai formé les expressions des écarts moyens de la théorie, par rapport aux observations, en fonctions de la masse, et des corrections du grand axe et de la longitude de l'époque. Ces expressions sont indispensables pour fixer les limites entre lesquelles doit rester compris chacun des éléments; déterminons d'abord l'orbite la plus précise à laquelle elles puissent conduire.

» Voici les éléments auxquels je suis parvenu : les longitudes sont comptées à partir de l'équinoxe du 1^{er} janvier 1847; les distances sont rapportées à la moyenne distance de la Terre au Soleil; enfin, la masse du Soleil a été prise pour unité.

Demi-grand axe de l'orbite.....	36,154
Durée de la révolution sidérale.....	217 ^{ans} ,387
Excentricité.....	0,107.61
Longitude du périhélie.....	284° 45'
Longitude moyenne au 1 ^{er} janvier 1847.	318.47
Masse.....	$\frac{1}{8300}$

» On peut voir qu'en supposant, dans mon premier travail, que le grand axe de l'orbite de la planète cherchée était double de celui de l'orbite d'Uranus, j'avais fait une hypothèse très-voisine de la vérité.

» On déduit, des éléments qui précèdent, la position suivante de la planète au 1^{er} janvier 1847 :

Longitude héliocentrique vraie..	326° 32'
Distance au Soleil.....	33,06

» Cette longitude vraie diffère peu de 325 degrés, valeur qui résultait de mes premières recherches. La détermination actuelle est fondée sur des données plus nombreuses et plus précises; elle place le nouvel astre à 5 degrés environ à l'Est de l'étoile δ du Capricorne.

» L'opposition de la planète a eu lieu le 19 août dernier. Nous sommes donc actuellement à une époque très-favorable pour la découvrir. L'avantage qui résulte de sa grande distance angulaire au Soleil ira en diminuant sans cesse; mais, comme la longueur des jours décroît maintenant très-rapidement dans nos climats, nous nous trouverons longtemps encore dans une situation favorable aux recherches physiques qu'on voudra tenter.

» La nature et le succès de ces recherches dépendront du degré de visibilité de l'astre. Arrêtons-nous un moment à cette question. Examinons quels sont actuellement, au moment de l'opposition, le diamètre apparent et l'éclat relatif de la planète cherchée.

» On sait qu'à une distance égale à dix-neuf fois la distance de la Terre au Soleil, le disque d'Uranus apparaît sous un angle de 4 secondes sexagésimales. La masse de cette dernière planète est connue; elle est deux fois et demie environ plus faible que celle de la nouvelle planète. Ces données, jointes aux précédentes, nous suffiraient pour calculer le diamètre apparent du nouvel astre si nous connaissions le rapport de sa densité à celle d'Uranus. En général, les densités des planètes diminuent à mesure qu'on s'éloigne du Soleil. Nous ferons donc, quant au diamètre, une hypothèse défavorable à la visibilité de l'astre cherché, en admettant que sa densité soit égale à celle d'Uranus. Nous trouverons ainsi, qu'au moment de l'opposition, la nouvelle planète devra être aperçue sous un angle de 3",3. Ce diamètre est tout à fait de nature à être distingué, dans les bonnes lunettes, des diamètres factices, produits de diverses aberrations, si l'éclat du disque est suffisant.

» En supposant que le pouvoir réfléchissant de la surface de la nouvelle planète soit le même que celui de la surface d'Uranus, son éclat spécifique actuel sera le tiers environ de l'éclat spécifique dont jouit d'Uranus quand il se trouve dans sa distance moyenne au Soleil.

» Ces conditions physiques me semblent promettre que non-seulement on pourra apercevoir la nouvelle planète dans les bonnes lunettes, mais encore qu'on la distinguera par l'amplitude de son disque; que son apparence ne sera pas réduite à celle d'une étoile. C'est un point fort important. Si l'astre qu'il s'agit de découvrir peut être confondu, quant à l'aspect, avec les étoiles, il faudra, pour le distinguer parmi elles, observer toutes les petites étoiles situées dans la région du ciel qu'on doit explorer, et constater dans l'une d'entre elles un mouvement propre. Ce travail sera long et pénible. Mais si, au contraire, le disque de l'astre a une amplitude sensible qui ne permette pas de le confondre avec celui des étoiles; si l'on peut substituer, à la détermination rigoureuse de la position de tous les points lumineux, une

simple étude de leur apparence physique, les recherches marcheront alors rapidement.

» Les éléments attribués plus haut à la planète troublante, sont ceux avec lesquels on représente le mieux les observations d'Uranus. Je renvoie, pour l'appréciation de l'exactitude qu'on obtient ainsi, au tableau qui termine cette analyse, et qui présente la comparaison de la nouvelle théorie avec l'ensemble des observations. On verra que la précision est aussi grande qu'on peut le désirer, et supérieure même à celle qu'offrent les théories de la plupart des planètes connues. Lorsqu'on ne veut pas tenir compte de l'influence de la nouvelle planète, les erreurs de la théorie d'Uranus sont au contraire énormes, et dix fois supérieures à celles qu'on peut tolérer.

» Je passe à la détermination des limites entre lesquelles on peut faire varier chacun des éléments ci-dessus déterminés, sans cesser de représenter les observations; non plus, sans doute, avec la plus entière rigueur, mais avec une approximation dont on pourrait se contenter, si les observations avaient été faites dans des circonstances peu favorables.

» Reprenons la position que nous avons déterminée plus haut pour la planète troublante. Nous pourrions écarter notablement l'astre de cette position dans une direction déterminée, située dans l'écliptique, et continuer de satisfaire aux observations d'Uranus, si nous faisons varier d'une manière convenable les éléments des orbites des deux planètes. Et, toutefois, à mesure que nous nous éloignerons de la première position, les observations d'Uranus seront moins bien représentées; et nous arriverons, dans la direction que nous avons suivie, à un point de l'écliptique au delà duquel on ne pourra placer la planète troublante sans introduire entre la théorie et les observations des différences inadmissibles. La suite des points analogues, situés dans toutes les directions autour de la première position, formera une enceinte en dedans de laquelle l'astre cherché sera de toute nécessité renfermé. En menant à cette enceinte deux tangentes extrêmes par le Soleil, on connaîtra deux longitudes entre lesquelles il suffira de chercher la nouvelle planète. Mais le tracé de l'enceinte est fort compliqué; je vais me borner à exposer d'une manière générale comment je suis arrivé à l'effectuer.

» Le demi-grand axe de l'orbite, auquel j'ai trouvé pour valeur la plus précise 36,154, ne peut varier qu'entre les limites 35,04 et 37,90. Les durées extrêmes correspondantes de la révolution sidérale sont 207 et 233 ans environ.

» Ces limites étant connues, restreignons d'abord le problème de la détermination de l'enceinte à un cas particulier. Considérons spécialement une

planète qui effectuerait sa révolution en un temps déterminé, en 220 années par exemple; et, laissant tous les autres éléments arbitraires, proposons-nous de tracer l'enceinte dans laquelle il faudra renfermer cet astre, pour qu'on puisse satisfaire aux observations d'Uranus. Cette enceinte ne sera pas continue; ce sera un polygone à côtés curvilignes, un pentagone généralement. La raison de cette particularité se comprendra aisément, si l'on réfléchit que les anciennes observations d'Uranus, qui jouent un rôle important dans ces discussions, ne se rencontrent qu'à des intervalles de temps très-longes et très-différents les uns des autres.

» Imaginons que nous venions à écarter notre planète de sa position la plus précise, dans une direction déterminée, et sans faire varier la durée de sa révolution. Toutes les observations continueront à être représentées jusqu'à une certaine distance de l'origine, où nous serons obligés de nous arrêter, parce qu'une des observations, *une seule* en général, ne permettra pas d'aller plus loin. Supposons, pour fixer les idées, que ce soit la *première* observation de Flamsteed. Tant que ce sera cette première observation qui limitera l'écart de la planète, par rapport à l'origine, et dans une direction différente de la première, la limite qu'on obtiendra ainsi sera une courbe continue; mais, lorsqu'une autre observation, celle par exemple qui fut faite en 1756 par Mayer, se substituera à la précédente, parce qu'elle deviendra plus exigeante qu'elle, la courbe limite changera de forme; au point où elle coupera la première, il y aura discontinuité dans l'enceinte; cette enceinte sera, comme je l'ai annoncé, un polygone à côtés curvilignes.

» Nous pourrions tracer de même les polygones curvilignes, dans l'intérieur desquels serait comprise une planète qui mettrait à effectuer sa révolution, non plus 220 années, mais bien 222 ans, 224 ans..., ainsi de suite jusqu'à 233 ans: on ne saurait supposer une révolution plus longue. Semblablement, nous pourrions supposer que la durée de la révolution s'abaisse successivement à 218 ans, 216 ans..., ainsi de suite jusqu'à 207 ans. L'amplitude des polygones ainsi formés diminuera, en général, à mesure que la durée de la révolution se rapprochera de ses valeurs extrêmes; et quand on supposera cette durée égale à l'une de ses limites, le polygone se réduira à un point: ce sera la seule position que puisse occuper la planète.

» Revenons maintenant au problème le plus général; laissons la durée de la révolution variable comme les autres éléments. La planète pourra dès lors être cherchée dans l'un quelconque des polygones curvilignes que nous venons de tracer. Après avoir multiplié convenablement le nombre de ces polygones, on pourra les circonscrire, les envelopper par une courbe qui consti-

tuera l'enceinte demandée. Il ne me reste plus qu'à faire connaître les longitudes des tangentes extrêmes menées à cette enceinte.

» La longitude de la tangente menée à l'Ouest, est, en nombre rond, de 221 degrés. La position la plus précise assignée à l'astre étant de $326^{\circ}32'$, on voit qu'on aura à explorer, en arrière de cette position, une étendue de 5 degrés et demi.

» La limite supérieure est loin d'être aussi restreinte; mais il ne me paraît pas qu'elle puisse être acceptée avec une grande probabilité dans toute son étendue; car, à mesure qu'on fait croître la longitude, on voit, à partir d'un certain point, l'excentricité de l'astre cherché grandir sans cesse, et acquérir des valeurs qui paraissent peu en harmonie avec la constitution du système des grosses planètes, système dont le nouvel astre fait partie sous le double rapport de sa situation et de la grandeur de sa masse. Quoi qu'il en soit, on peut porter la position actuelle de la planète jusqu'à 335 degrés de longitude héliocentrique, sans que la valeur de l'excentricité grandisse au delà de $(\frac{1}{8})^{\text{ème}}$. Mais si l'on voulait admettre une excentricité supérieure, et égale à $(\frac{1}{6})^{\text{ème}}$, il faudrait pousser les recherches jusqu'à 245 degrés de longitude.

» Ces positions, éloignées du lieu le plus précis, me paraissent, je le répète, peu probables: on n'y arrive qu'en admettant une excentricité considérable, et en se contentant de satisfaire aux observations avec une médiocre exactitude. Il me semble donc que les recherches physiques seraient convenablement conduites de la manière suivante: On partirait du lieu situé par $326^{\circ}32'$ de longitude; et, en s'éloignant simultanément à droite et à gauche de ce point, on explorerait la région de l'écliptique qui est comprise entre 321 et 335 degrés de longitude héliocentrique. Si, jusque-là, les recherches avaient été vaines, on recourrait aux longitudes supérieures.

» Dans les discussions dont je viens de donner les principaux résultats, la masse de la planète est restée comprise entre $\frac{1}{14600}$ et $\frac{1}{4700}$. Ainsi, dans toutes les hypothèses admissibles, elle est supérieure à la masse d'Uranus.

Comparaison de la nouvelle théorie avec les observations.

DATES des observations.	EXCÈS des positions calculées sur les positions observées.	DATES des observations.	EXCÈS des positions calculées sur les positions observées.
1781-1782	+ 2",3	1813-1815	- 0",9
1783-1784	+ 0,1	1816-1817	+ 0,4
1785-1788	- 1,2	1818-1820	+ 0,4
1789-1790	- 3,4	1821-1823	+ 0,9
1791-1792	+ 0,3	1824-1827	- 5,4
1793-1794	- 0,5	1828-1830	- 2,2
1795-1797	- 1,0	1835	- 0,8
1797-1801	+ 0,9	1835-1836	+ 2,3
1802-1804	+ 0,8	1837-1838	+ 2,5
1804-1806	+ 0,8	1839-1840	+ 2,2
1807-1808	+ 2,1	1841-1842	- 0,2
1808-1810	+ 0,8	1842-1844	- 0,4
1811-1813	- 0,5	1844-1845	- 0,3

» On voit que toutes les observations modernes sont bien représentées. Il en est de même des anciennes, dans les limites de leur exactitude : voici les quantités dont les longitudes, calculées par la théorie, surpassent les longitudes anciennement observées :

- » 1790. Une observation *unique* de Flamsteed. - 19",9
- » 1712 et 1715. Quatre observations *concordantes* faites par Flamsteed. + 5",5
- » 1750. Deux observations de Lemonnier. - 7",4
- » 1753 et 1756. Deux observations *très-précises* faites par Mayer et Bradley. - 4",0
- » 1764. Une observation faite par Lemonnier. + 4",9
- » 1768 et 1769. Huit observations faites par Lemonnier. . . . + 3",7
- » On remarquera, sans doute, que les observations les plus précises, celles dont l'exactitude est contrôlée par d'autres observations, sont toutes représentées avec une scrupuleuse exactitude. Ce sont : l'opposition de 1715, les observations faites par Bradley et Mayer, celles enfin faites par Lemonnier en 1768 et 1769.

» On ne trouve, dans la discussion immédiate de l'observation faite en 1690 par Flamsteed, aucune garantie d'exactitude.

» Je terminerai cette analyse, par une remarque qui me paraît très-propre à porter dans les esprits la conviction que la théorie que je viens d'exposer est l'expression de la vérité. Le caractère essentiel de l'exactitude de toute théorie, c'est qu'elle puisse satisfaire non-seulement à l'ensemble, mais encore aux moindres détails des observations. Or les observations nous apprennent qu'en 1845, les erreurs des anciennes Tables d'Uranus ne sont pas les mêmes au moment de la quadrature qu'au moment de l'opposition; ce qui ne peut tenir qu'à l'inexactitude du rayon vecteur, que ces Tables donnent trop petit. La nouvelle théorie doit, si elle est exacte, accroître le rayon vecteur d'Uranus, de manière à faire concorder les quadratures avec les oppositions. C'est ce qui a précisément lieu.

» J'examinerai, dans un prochain article, s'il est possible de déduire des observations la latitude actuelle de la planète. Cette latitude sera certainement très-faible, ainsi qu'on en peut juger à l'inspection des latitudes d'Uranus qui s'accordent à peu près avec les Tables en usage. »

M. CAUCHY dépose sur le bureau un Mémoire ayant pour titre : *Mémoire sur la détermination complète des variables propres à vérifier un système d'équations différentielles.*

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Sur un nouveau système de forage;*
par M. FAUVELLE, de Perpignan (communiqué par M. Arago).

(Commissaires, MM. Arago, Poncelet, Élie de Beaumont.)

« En 1833 j'assistais au forage d'un puits artésien à Rivesaltes; l'eau était trouvée, et jaillissait avec abondance. On allait procéder au tubage, et, pour cela, on élargissait le trou de sonde du haut en bas; je fus frappé de voir qu'il ne fallait plus remonter la sonde pour se débarrasser des déblais, et que l'eau venant du fond remontait, sous forme liquide, toute la terre que l'outil perforateur détachait des parois. Je dis alors à mon ami Bassal : Voilà un fait bien remarquable et bien facile à imiter; si, au moyen d'une sonde creuse, on injectait de l'eau dans le trou à mesure que l'on descend, l'eau, en remontant, entraînerait tous les déblais. Tel est le point d'où je suis parti pour établir un nouveau système de forage.

» L'appareil se compose d'une sonde creuse formée de tubes vissés bout à bout; l'extrémité inférieure de la sonde est armée d'un outil perforateur, ap-